OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2019

Gara Interregionale – 15 febbraio

Categoria Junior 2

1. Una questione di densità
Elencate in ordine di densità i quattro pianeti rocciosi del Sistema Solare, dal meno denso al più denso.

Soluzione.
I quattro pianeti rocciosi del Sistema Solare sono Mercurio, Venere, Terra e Marte.
La densità (ρ) è data da:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M \cdot 3}{4\pi \cdot R^3}$$

Dai dati in tabella ricaviamo:

$$\rho_{mercurio} \cong 5.42 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3};\ \rho_{venere} \cong 5.24 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3};\ \rho_{terra} \cong 5.49 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3};\ \rho_{marte} \cong 3.91 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3}$$

Quindi i pianeti rocciosi dal meno denso al più denso sono: Marte, Venere, Mercurio e Terra.

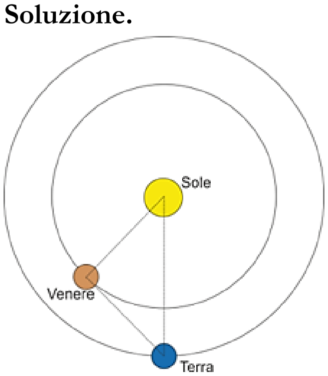
2. Il Sole visto da α Centauri
Sapendo che α Centauri dista dal Sole 4.365 anni luce, calcolate la magnitudine apparente del Sole visto da un pianeta in orbita attorno ad α Centauri.

Soluzione.
Trascurando la distanza del pianeta da α Centauri rispetto alla sua distanza dal Sole e assumendo per il pianeta un'atmosfera simile a quella della Terra, dalla relazione che lega magnitudine assoluta (M) a magnitudine apparente(m): M = m + 5 – 5 log d, ed essendo d = 4.365 anni luce = 1.338 pc, ricaviamo:

$$m_{Sole} = M_{Sole} - 5 + 5 \log d = 4.84 - 5 + 5 \log 1.338 = 0.47$$

3. L'elongazione di Venere
Assumendo per Terra e Venere orbite circolari, l'elongazione massima di Venere è 46°.
1. Indicate su un disegno la posizione del Sole e della Terra, l'orbita di Venere e la sua posizione quando Venere, visto dalla Terra, appare alla massima elongazione;
2. ricavate dal disegno la corrispondente distanza Terra-Venere;
3. indicate che fase ha Venere quando, osservato dalla Terra, è alla massima elongazione.

Soluzione.



1. La massima elongazione di Venere si ha quando la congiungente Terra-Venere è tangente all'orbita di Venere, come nel disegno qui a lato e nella sua situazione simmetrica (ovvero con Venere a destra della congiungente Terra-Sole).

2. Abbiamo così un triangolo Terra (T) - Venere (V) - Sole (S). Poiché l'angolo $V\hat{T}S$ è di 46° (massima elongazione di Venere), l'angolo $T\hat{V}S$ è retto (proprietà della tangente a una circonferenza) e la distanza Terra – Sole (a) è di 1 UA (assumendo orbite circolari), ricaviamo:

$$distanza_{Terra-Venere} = a \cdot \cos\left(V\hat{T}S\right) = 1\ UA \cdot \cos\ (46°) = 0.695\ UA$$
$$= 103.9\ \cdot\ 10^6\ km$$

3. Nella configurazione del disegno Venere appare, osservato da Terra, illuminato per metà. In particolare, appare illuminata la metà di destra. Entrambi i pianeti si muovono intorno al Sole in senso antiorario, ma dato che il periodo di rivoluzione di Venere è minore di quello della Terra, Venere si muove lungo la sua orbita più velocemente della Terra, quindi la sua elongazione diminuirà e Venere andrà verso la congiunzione inferiore con il

Sole (fase di Venere nuova). Possiamo quindi dire che nella configurazione del disegno la fase di Venere è "ultimo quarto". Nella configurazione simmetrica a quella del disegno Venere appare illuminato nella metà di sinistra e va verso la congiunzione superiore con al Sole (fase di Venere pieno). Nella configurazione simmetrica la fase di Venere è quindi "primo quarto".
Possiamo notare che le fasi di Venere sono opposte rispetto a quelle della Luna: Venere è al primo quarto quando è illuminata la sua metà di sinistra e all'ultimo quarto quando è illuminata la sua metà di destra.

4. Un gioco da gatti
La gattina Karel gioca con una pallina di polistirolo espanso che riproduce la Terra in scala 1:159450000. Sapendo che la densità del polistirolo espanso è di 0.04 g/cm^3, calcolate la massa della pallina in g. Se esistesse un pianeta extrasolare con la densità del polistirolo espanso e la massa della Terra, quale sarebbe il suo raggio in km? Quale sarebbe il rapporto con il raggio della Terra? Inoltre, quale sarebbe il peso di Karel su di esso, sapendo che sulla Terra la gattina pesa 26.5 N?

Soluzione.
Per calcolare la massa della pallina ricaviamo il suo volume, che poi moltiplicheremo per la densità. Per calcolare il volume, dobbiamo conoscere il raggio della pallina: sappiamo che essa è la riproduzione in scala 1:159450000 della Terra, cioè il raggio della pallina è:

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{R_T}}{159450000} = \frac{6378\ \mathrm{km}}{159450000} = 4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{km} = 4\ \mathrm{cm}$$

La massa della pallina è:

$$\mathrm{M} = \mathrm{V} \cdot \rho = \frac{4\pi \cdot \mathrm{R}^3 \cdot \rho}{3} = \frac{4\pi \cdot 4^3\ \mathrm{cm}^3 \cdot 0.04 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}{3} = 10.7\ \mathrm{g}$$

Il raggio del pianeta di polistirolo è quindi:

$$\mathrm{R_P} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \mathrm{M_T}}{4\pi \cdot \rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5.97 \cdot 10^{27}\mathrm{g}}{4\pi \cdot 0.04 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}} = \sqrt[3]{3.56 \cdot 10^{28}\ \mathrm{cm}^3} = 3.29 \cdot 10^9\ \mathrm{cm} = 3.29 \cdot 10^4\ \mathrm{km} \cong 5.16\ \mathrm{R_T}$$

L'accelerazione di gravità sul pianeta vale:

$$g_P = \frac{G\, M_P}{R_P^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{1.08 \cdot 10^{15}} = 0.368\ \frac{m}{s^2}$$

Ricaviamo la massa di Karel (m_K) dal suo peso sulla Terra:

$$m_K = \frac{P_{KT}}{g_T} = \frac{26.5\ N}{9.807\ \frac{m}{s^2}} = 2.70\ kg$$

Infine possiamo ricavare il peso della gattina sul pianeta:

$$P_{KP} = m_K \cdot g_P = 2.70\ kg \cdot 0.368\ \frac{m}{s^2} = 0.994\ N$$

5. Un sistema di stelle di neutroni
PSR B1913+16 è un sistema binario composto da due stelle di neutroni identiche perfettamente sferiche ciascuna con densità media $\rho = 1.965 \cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3}$ e massa $\mathrm{M} = 2.831 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$. Le due stelle ruotano su un'orbita circolare con un periodo P = 7.7542 ore, che attualmente diminuisce di 55 secondi ogni anno.
Calcolate:
1. il raggio, in km, delle due stelle di neutroni;
2. il valore attuale del semiasse maggiore dell'orbita;
3. la velocità con cui attualmente le due stelle si muovono sull'orbita;
4. di quanto diminuisce dopo un anno il semiasse maggiore dell'orbita.

Soluzione.
1. Poiché il volume di una sfera è dato dalla relazione:

$$\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi\, \mathrm{R}^3 = \frac{\mathrm{M}}{\rho},$$

ricaviamo per il raggio delle due stelle:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3\ M}{4\ \pi\ \rho}} = \sqrt[3]{\frac{3\ \cdot 2.831\ \cdot\ 10^{30}\ \text{kg}}{4\ \cdot\ \pi\ \cdot 1.965\ \cdot\ 10^{11} \text{kg/cm}^3}} = 1.509 \cdot\ 10^{6}\ \text{cm} = 15.09\ \text{km}$$

2. Il periodo di rivoluzione del sistema vale attualmente P = 7.7542 ore = 27915 s. Possiamo ricavare il valore del semiasse maggiore dell'orbita (che è uguale alla distanza tra le due stelle poiché l'orbita è circolare) dalla III legge di Keplero:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G\ \cdot 2\ M\ \cdot\ P^2}{4\ \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5.662\ \cdot\ 10^{30}\ \text{kg} \cdot 7.7925\ \cdot\ 10^{8}\ \text{s}^2}{39.478}} \cong 1.954\ \cdot\ 10^{9}\ \text{m} = 1.954\ \cdot\ 10^{6}\ \text{km}$$

3. La lunghezza dell'orbita per ciascuna stella è:
$C = \pi\ a\ \cong 6.139\ \cdot\ 10^{6}\ \text{km}$, per cui la velocità lungo l'orbita vale:

$$V = \frac{C}{P} = \frac{6.139\ \cdot\ 10^{6}\ \text{km}}{27915\ \text{s}} \cong 219.9\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Si può pervenire allo stesso risultato calcolando la prima velocità cosmica di una delle due stelle dall'eguaglianza tra la forza di gravità: $F_g = G\ \frac{M \cdot M}{a^2}$ e la forza centrifuga: $F_c = \frac{V^2}{\frac{a}{2}}\ M$, avremo quindi:

$$V = \sqrt{\frac{G\ M}{2\ a}} = \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot\ 2.831\ \cdot\ 10^{30}\ \text{kg}}{2\ \cdot\ 1.954\ \cdot\ 10^{9}\ \text{m}}} \cong 219.9\ \frac{km}{s}$$

4. Dopo un anno il periodo di rivoluzione varrà $P_1 = P - 55 = 27860\ \text{s}$ e la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita (a_1) sarà:

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{G\ \cdot 2\ M\ \cdot\ P_1{}^2}{4\ \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5.662\ \cdot\ 10^{30}\ \text{kg} \cdot 7.7618\ \cdot\ 10^{8}\ \text{s}^2}{39.478}} \cong 1.951\ \cdot\ 10^{9}\ \text{m} = 1.951 \cdot\ 10^{6}\ \text{km}$$

Quindi dopo un anno il semiasse maggiore sarà diminuito di circa $\Delta a = a - a_1 =$ 3000 km.

Nota: normalmente il termine "semiasse maggiore dell'orbita" viene utilizzato riferendosi a situazioni in cui un corpo di piccola massa ruota intorno a uno di massa molto maggiore, che viene considerato a tutti gli effetti fermo. Nel caso in esame invece la massa delle due stelle è uguale e quindi entrambe si muovono su una circonferenza il cui diametro è pari alla loro distanza. Per calcolare il periodo di rivoluzione il valore di "a" da inserire nella III legge di Keplero è proprio la loro distanza. Si è mantenuta la dicitura "semiasse maggiore dell'orbita", ma ovviamente sono state valutate come corrette le soluzioni in cui si fa riferimento alla distanza delle due stelle e alla diminuzione di distanza delle due stelle.

Olimpiadi Italiane di Astronomia 2019

Gara Interregionale – 14/15 febbraio 2019

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

Raggio medio	695475 km	Età stimata	$4.57 \cdot 10^9$ anni
Massa	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg	Classe spettrale	G2 V
Temperatura della fotosfera	5778 K	Posizione nel diagramma HR	Sequenza Principale
Magnitudine apparente dalla Terra	- 26.74	Distanza media dal centro galattico	27000 anni luce
Magnitudine assoluta	+ 4.83	Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico	$2.5 \cdot 10^8$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	Mercurio	Venere	Terra	Luna	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno
Raggio medio (km)	2440	6052	6378	1738	3397	71493	60267	25557	24766
Massa (kg)	$3.30 \cdot 10^{23}$	$4.87 \cdot 10^{24}$	$5.97 \cdot 10^{24}$	$7.35 \cdot 10^{22}$	$6.42 \cdot 10^{23}$	$1.90 \cdot 10^{27}$	$5.69 \cdot 10^{26}$	$8.68 \cdot 10^{25}$	$1.02 \cdot 10^{26}$
Semiasse maggiore dell'orbita (km)	$57.91 \cdot 10^6$	$108.2 \cdot 10^6$	$149.6 \cdot 10^6$	$384.4 \cdot 10^3$	$227.9 \cdot 10^6$	$778.4 \cdot 10^6$	$1.427 \cdot 10^9$	$2.871 \cdot 10^9$	$4.498 \cdot 10^9$
Periodo orbitale	87.969 ^{g}	224.70 ^{g}	365.26 ^{g}	27.322 ^{g}	686.97 ^{g}	11.863 ^{a}	29.447 ^{a}	84.017 ^{a}	164.79 ^{a}
Eccentricità dell'orbita	0.2056	0.0068	0.0167	0.0549	0.0934	0.0484	0.0542	0.0472	0.0086
Tipo	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

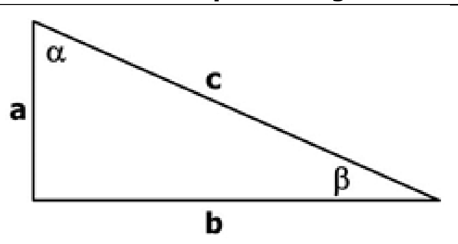
Tabella 3 – Area della superficie e volume per figure geometriche notevoli

area ellisse	area superfice sfera	area superfice cilindro	volume sfera	volume cilindro
$\pi \cdot a \cdot b$	$4\pi \cdot R^2$	$2\pi \cdot R\,(h+R)$	$(4/3)\,\pi \cdot R^3$	$\pi \cdot R^2 \cdot h$

Tabella 4 – Costanti fisiche

Nome	Simbolo	Valore	Unità di misura
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.670 \cdot 10^{-8}$	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
Velocità della luce nel vuoto	c	299792	$km \cdot s^{-1}$
Costante di Gravitazione Universale	G	$6.674 \cdot 10^{-11}$	$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
Accelerazione di gravità sulla Terra al livello del mare	g	9.807	$m \cdot s^{-2}$

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli



Teorema di Pitagora: $c^2 = a^2 + b^2$

Funzioni trigonometriche:
$a = c \operatorname{sen} \beta$ $\quad a = c \cos \alpha$ $\quad a = b \tan \beta$

Tabella 6 – Fattori di conversione

1 anno luce = $9461 \cdot 10^9$ km = 0.3066 parsec = 63242 UA

1 parsec = $30857 \cdot 10^9$ km = 3.262 anni luce = 206265 UA

1 radiante ≅ 57° 17′ 45″ ≅ 206265″

M (Mega) = 10^6

G (Giga) = 10^9

μ (micro) = 10^{-6}

n (nano) = 10^{-9}

Å (angstrom) = 10^{-10} m

Nota: I valori numerici presenti nelle tabelle sono in notazione scientifica.